

أجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول (26 درجة) (أ) أوجد مجال تقارب متسلسلة النوال :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n \quad \text{المعرفة على } R = \{-1\}$$

(ب) ادرس تقارب أو تباعد الحناء اللانهائي الآتي واحسب قيمته في حال التقارب :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} \right|$$

السؤال الثاني (40 درجة) (أ) ادرس تقارب المتكامل المتتالية النوال التي حددها العام يعطى كما يلي :

$$f_n(x) = \frac{2n^2 x}{1+n^2 x^2} \quad , \quad x \in R \quad , \quad n \in N$$

(ب) هل يمكن لتتالية نوال غير مستمرة على مجال ما أن تكون متقاربة بالنظام من دالة

مستمرة على هذا المجال ؟ وضح ذلك بدراسة تقارب المتكامل المتتالية النوال التي حددها العام هو :

$$g_n(x) = \frac{1}{n} D(x) \quad , \quad x \in R \quad , \quad n \in N$$

حيث أن :  $D(x)$  دالة ديرخلية على  $R$ 

(ج) ادرس تقارب المتكامل المتسلسلة النوال الآتية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n (1-x)^n}{1+n^2 x^n} \quad , \quad x \in [0,1]$$

السؤال الثالث (34 درجة) : (أ) أوجد منشور فورييه لدالة :  $f(x) = \sin x$  المعرفة على المجال  $[0, \pi]$ 

التي تحتوي الحدود فقط

(ب) استخدم التكاملات الأويلرية ، أثبت صحة ما يلي :

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx = \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}} \quad , \quad 0 < m < n \quad \text{و} \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad , \quad x > 0$$

لغة المقرر

لغة الأسئلة

د. منير مخلوف

مع شفقتي بالتوفيق والتمحاح

محضر في 25/1/2016

مصحح

كلية العلوم / مصر / كلية / جامعة / الرياضيات / المصنف : ٢٠٠ / المصنف : ٢٠٠

جواب السؤال الأول : (أ) إثبات متباينة وال :  $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n \geq \frac{x-1}{x+1}$  لكل  $x > 0$  و  $n \in \mathbb{N}$

[26]

نستخدم الاستقراء :  $x > 0$  ،  $n=1$  :  $\frac{x-1}{x+1} \geq \frac{x-1}{x+1}$  ، وهذا صحيح

والآن نثبت أنه إذا كانت متباينة صحيحة لـ  $n$  ، فإنها صحيحة لـ  $n+1$  :  $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1$  ، وهذا صحيح

$$-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1$$

وهذا يعني أن : (1) إذا كانت :  $x > 0$  ، فإن :  $x+1 > 0$  ،  $x-1 < x+1$

$$-x-1 < x-1 < x+1$$

$$-x-1 < x-1 < x+1$$

أي :  $-2x < 0$  ، ومنه :  $x > 0$  ،  $x+1 > 1$  ، وهذا صحيح

(2) إذا كانت :  $x < 0$  ،  $x+1 < 0$  ، متباينة صحيحة

$$x+1 > x-1 > -x-1$$

وهذا صحيح ، و  $x < 0$  ، الذي يؤدي إلى :  $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| > 1$  ، وهذا صحيح

وبذلك نكون قد أثبتنا المتباينة مستخدما طريقة من أجل :  $x > 0$  ، وأما من أجل

$x=0$  ، فنحصل على :  $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n = 1$  ،  $n \in \mathbb{N}$  ، وهذا صحيح

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$  غير موجودة

وعليه فإن :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$  غير موجودة

$$P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k(k+1)}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$$

$$P_n = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} \cdot \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} \cdots \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$$

٢٢

$$P_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{(n-1)!}{n!} \cdot \frac{(n+2)!}{(n+1)!} = \frac{1}{3} \cdot \frac{n+2}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{1}{3}$$

فإننا نلاحظ في الحدود من متباينة  $P_n$  ،  $P = \frac{1}{3}$



(2)

$$f_n(0) = 0$$

مما يثبت السؤال الثاني (أ) إذا كان  $x=0$  ، فنلاحظ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0 \quad \text{مما يثبت} \quad \boxed{1/c}$$

أما إذا كان  $x \neq 0$  ، فنلاحظ

$$|f_n(x)| \leq \frac{2n^2|x|}{n^6|x|^2} = \frac{2}{n^4|x|} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

فلاحظ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

أي دالة النهاية :  $f(x) = 0$  كانت :  $|f_n(0) - f(0)| = 0$   
 ولتذكر بعد هذه أمثلة

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{2n^2x}{n^6x^2} - 0 \right| \leq \frac{2n^2|x|}{n^6|x|^2} = \frac{1}{n^4|x|} \quad \forall x \neq 0$$

ومن هنا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} = 0$$

وهذا يعني أن المسألة المطروحة مستقرة باستخدام من  
 الدالة الصغرى على  $\mathbb{R}$

(ب) نضع هنا  $f_n(x) = \frac{1}{n} D(x)$  التي هي الدالة

$$g_n(x) = \frac{1}{n} D(x)$$

حيث :

$$D(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

1/c

مجموعة الأعداد المماثلة في مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$

وهذه الدالة غير مستقرة على  $\mathbb{R}$  لأن دالة ديرمانيه غير مستقرة في

أي نقطة من  $\mathbb{R}$  كما أن :

$$0 \leq D(x) \leq 1 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} D(x) = 0$$

أي أن دالة النهاية هي :  $g(x) = 0$  وهي دالة مستقرة على  $\mathbb{R}$

كما أن هذا المقام هو مستقر من أجل أي  $\epsilon > 0$  يوجد  $N = N(\epsilon)$

مستطوع

$$|g_N(x) - g(x)| = \left| \frac{1}{N} D(x) - 0 \right| = \frac{1}{N} |D(x)| \leq \frac{1}{N} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{و } n > N$$

$$N > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow N = N(\varepsilon) = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$$

فأثبت  $N = N(\varepsilon)$  موجود والتناهي

$$\sqrt{x(1-x)} \leq \frac{x + (1-x)}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$x^n(1-x)^n \leq \frac{1}{4^n} \quad ; \quad \forall x \in [0,1]$$

ولذلك يتلوه لانه العددية  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$  متقاربة حسب اختبار كوشي

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{4^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{4^n}} = \frac{1}{4} < 1$$

فأثبت:  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)^n$  متقاربة لانه على  $[0,1]$ أيضاً متقاربة لانه  $\left( \frac{1}{1+n^2x^2} \right)$  متقاربة صاعدة على  $[0,1]$  فثبت

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1 + n^2x^2 < 1 + (n+1)^2x^2 \Rightarrow \frac{1}{1+n^2x^2} > \frac{1}{1+(n+1)^2x^2}$$

$$\left| \frac{1}{1+n^2x^2} \right| \leq 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1]$$

وبنه حسب اختبار آل بي يتبع أن:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(1-x)^n}{1+n^2x^2}$  متقاربة لانهعلى  $[0,1]$



